КОНЕЧНЫЕ П-РАЗРЕШИМЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ С П-ХОЛЛОВОЙ *TI*-ПОДГРУППОЙ

А.А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси, Кирова 32^a, 246050 Гомель, Беларусь
yadchenko_56@mail.ru

Пусть π — множество простых чисел, G — конечная π-разрешимая группа, которая имеет точный комплексный характер χ степени n и содержит π-холлову TI-подгруппу H. Если $\pi = \{p\}$, p — простое число, то Окуяма [1] показал, что H нормальна в G, когда $n < |H|/\varepsilon - 1$, где $\varepsilon = 1$ при $p > 2$ и $\varepsilon = 2$ при $p = 2$. Ядченко [2] рассмотрел случай, когда π — произвольное множество простых чисел и $n \leq |H|/\varepsilon - 1$, где $\varepsilon = 1$, когда силовская 2-подгруппа группы H не является обобщенной группой кватернионов и $\varepsilon = 2$ в противном случае. Оказалось, что либо подгруппа H нормальна в G, либо $n = |H|/\varepsilon - 1 = q^\alpha = f$. Здесь q — простое π'-число, α — некоторое натуральное число. Если же π — множество простых нечетных чисел, подгруппа G разрешима и характер χ неприводим, то в [3] утверждается. что либо $H \triangleleft G$, либо n делится на $|H|$ или на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv -1$ или $1 \pmod{|H|}$. Здесь же в следствии утверждается, что, когда $n < 2|H|$ и $H \not\triangleleft G$, то $n = |H| - 1$, $|H|$, $|H| + 1$, $2(|H| - 1)$ или $2|H| - 1$ и n — степень простого числа за исключением, может быть, случая, когда $n = |H|$.

В серии статей [4-6] доказывается, что следствие справедливо и для π-разрешимых групп. В последней статье этой серии поставлен вопрос о справедливости полученного результата для π-разрешимых групп произвольной степени n.

Задача. Справедливо ли следующее утверждение?

Пусть G — π-разрешимая неприводимая линейная группа степени n и H – ее π-холлова TI-подгруппа нечетного порядка. Если n не делится на $|H|$ и n не делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv -1$ и $1 \pmod{|H|}$, то $H \triangleleft G$.

Для разрешимых групп это утверждение верно [3]. Доказанная в [4-6] теорема дает положительный ответ на поставленный вопрос без применения теоремы о классификации простых групп, если $n < 2|H|$. Результаты, доказанные также без применения теоремы о классификации простых групп и опубликованные в [7], тоже подтверждают справедливость поставленной задачи для произвольного n в некоторых частных случаях.

При $|H| = p$ эта задача совпадает с задачей Айзекса о переносе теоремы о разрешимых неприводимых линейных групп на p-разрешимый случай, поставленной в [8].

В [9] поставленная задача решается положительно без применения теоремы о классификации конечных простых групп, если подгруппа G_2 абелева.

В [10] она решается положительно с применением теоремы о классификации конечных простых групп.

При доказательстве этих результатов основным является случай, когда $G = HO_{\pi'}(G)$. В этом случае условие, что H — TI-подгруппа в G равносильно тому, что $C_{O_{\pi'}(G)}(H) = C_{O_{\pi'}(G)}(h)$ для каждого неединичного элемента $h \in H$ [10]. Полезными при доказательстве некоторых из приведенных результатов оказались следующие утверждения.

Лемма 1 ([8]). *Если $\Gamma = AB$ — группа, где $B \triangleleft \Gamma$ и $(|A|, |B|) = 1$, то $B = [B, A]C_B(A)$.*

Лемма 1 в литературе встречается только для случая, когда группа B примарна.

Лемма 2 ([10], стр. 152-153). *Пусть $\Gamma = AB$ — группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$ и $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$. Предположим, что для некоторой A-инвариантной подгруппы $B_1 \subseteq B$ число $|B : B_1|$ не делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|A|}$. Тогда $B = B_1 C_B(A)$.*

Доказательство. Обозначим $C = C_B(A)$. Так как группа $B_1 \cap C$ — A-инвариантна, то по теореме 6.2.2 [11] для $q \in \pi(|B : B_1|)$ она содержит такую A-инвариантную силовскую

q-подгруппу Q_0, что $Q_0 \subseteq Q_{B_1}$ — A-инвариантная силовская q-подгруппа B_1 и $Q_{B_1} \subseteq Q_B$ — A-инвариантная силовская q-подгруппа из B. Пусть $Q_C = Q_B \cap C$. Тогда $Q_0 = Q_{B_1} \cap Q_C$ и, значит $|B_1 \cap C|_q = |Q_{B_1} \cap Q_C|$.

Пусть $|Q_{B_1}| = q^{\alpha}$ и $|Q_B| = q^{\beta}$. Рассмотрим A-инвариантное множество $Q_{B_1}Q_C$ и заметим, что $|Q_{B_1}Q_C| = q^r$ для такого целого неотрицательного числа r, что $\alpha \le r \le \beta$.

Предположим, что $r < \beta$. Тогда $Q_{B_1}Q_C \neq Q_B$ и множество элементов $Q_B \setminus Q_{B_1}Q_C$ непустое. При действии на нем подгруппой A оно не содержит неподвижных точек, и длина каждой орбиты делится на $|A|$. Таким образом, $|A|$ делит

$$q^{\beta} - q^r = q^r(q^{\beta-r} - 1).$$

Значит,

$$q^{\beta-r} \equiv 1 \pmod{|A|}.$$

Так как $r \ge \alpha$, то $q^{\beta-r}$ делит $q^{\beta-\alpha} = |B : B_1|_q$. Мы получаем противоречие с условием леммы, ввиду последнего выделенного равенства.

Следовательно, $r = \beta$ и $Q_{B_1}Q_C = Q_B$.

Заметим, что

$$|B_1C|_q = \frac{|B_1|_q|C|_q}{|B_1 \cap C|_q} \ge \frac{|Q_{B_1}||Q_C|}{|Q_{B_1} \cap Q_C|} = |Q_{B_1}Q_C| = |Q_B| = |B|_q.$$

Так как $q \in \pi(|B : B_1|)$ – произвольный простой делитель, то $|B_1C| \ge |B|$. Но $B_1C \subseteq B$. Значит, $B_1C = B$. Лемма доказана.

Для неприводимых комплексных линейных групп степени $n < 2|H|$ с не нормальной π-холловой TI-подгруппой H нечетного порядка определены их факторизация и условия разрешимости. Для случая, когда $|\pi| > 1$ доказательство этих утверждений приводится в [12] и [13].

Литература

1. Okuyama T. *On finite groups whose Sylow p-subgroup is a T.I. set* // Hokkaido Math. J. 1975. V. 4. № 2. P. 303-305.

2. Ядченко А. А. *О конечных π-разрешимых линейных группах* // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника. 1986. С. 181-207.

3. Ядченко А. А. *Разрешимые неприводимые линейные группы произвольной степени с холловской TI-подгруппой* // Матем. заметки. 1990. Т. 48. В. 2. С. 137-144.

4. Ядченко А. А. *О π-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой $TI-$подгруппой нечетного порядка . I* // Труды Института математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16. № 2. С. 118-130.

5. Ядченко А. А. *О π-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой $TI-$подгруппой нечетного порядка . II* // Труды Института математики НАН Беларуси. 2009. Т. 17. № 2. С. 94-104.

6. Ядченко А. А. *О π-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой $TI-$подгруппой нечетного порядка . III* // Труды Института математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18. № 2. С. 99-114.

7. Ядченко А.А. *Об автоморфизмах и нормальных холловских подгруппах линейных групп* // Весцi НАН Беларусі. Серыя фiз.-мат. навук. 2007. № 3. С. 49-54.

8. Isaacs I. M. *Characters of solvable groups*, in: The Santa Cruz Conference on Finite Groups. Proc. Symp. Pure Math. 1980. V. 37. P. 377-384.

9. Ядченко А.А. *Об автоморфизмах неприводимых линейных групп с абелевой силовской 2-подгруппой* // Матем. заметки (принята в печать).

10. Ядченко А.А. *К проблеме Айзекса* // Матем. сборник. 2013. Т. 204. № 12. С. 147-156.

11. Gorenstein D. *Finite groups* // New York: Harper and Row. 1968.

12. Ядченко А.А. *О факторизации π-разрешимых неприводимых линейных групп* // Доклады НАН Беларуси. 2014. Т. 58. № 5. С. 5-11.

13. Yadchenko A.A. *On solvability of certain irreducible linear groups // AJOMCOR (принята в печать).*